UNIDAD 9 INTEGRAL DEFINIDA: ÁREAS Y VOLÚMENES

1.- Calcular las siguientes integrales definidas:

$a)\ \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad b)\ \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ $\qquad c)\ \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

$d)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$ $\qquad e)\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$ $\qquad f)\ \int_0^{\pi} (1+x^2)\cos x dx$

2.- Sean $a = \int_0^{\pi/2} x \cdot \operatorname{sen}^2 x dx$ y $b = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos^2 x dx$. Calcula a + b y a – b y obtén los valores de a y b.

3.- Sea $F(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt$, hallar F´(0).

4.- Determinar a y b para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a & si \quad x \le -1 \\ ax + b & si \quad -1 < x \le 0 \\ 3x^2 + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

y calcular I $= \int_2^{-1} f(x)dx$.

5.- Hallar el área limitada por y = x^2 + 1 , el eje OX y las rectas x = -2 y x = a, siendo a la abscisa del mínimo de la curva y = x^2 + 1.

6.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones
$y = 6x - x^2$ $\quad e \quad$ $y = x^2 - 2x$.

7.- Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2$ e $y^2 = 8x$.

8.- Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y = x^2$ y las rectas y = x, x = 0, x =2.

9.- Hallar el área determinada por: $y = 2x - x^2$, el eje OX y las rectas x = -1, x = 1.

10.- Hallar el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

11.- Demostrar que el círculo de radio r tiene de área $A = \pi \cdot r^2$.

12.- Hallar el área de la región del plano limitada por: x = 0, y = 3 e y = e^x.

13.- Hallar el área limitada por la curva $y = x \cdot e^{-x^2}$, el eje de abscisas y la recta x = a, siendo a la abscisa del máximo de la curva.

14.- Determinar el área de la zona del plano limitada por las rectas y = 0, x = 1, x = e y la gráfica de y = $(\ln x)^2$.

15.- Demostrar las fórmulas de los volúmenes de los siguientes cuerpos geométricos:

$a)\quad Cilindro: \quad V = \pi r^2 h$

$b)\quad Cono: \quad V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$c)\quad Esfera: \quad V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

16.- Determinar el volumen del cuerpo que se obtiene al hacer girar alrededor del eje OX la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, entre x = 0 y $x = \sqrt{2}$.

17.- Hallar el volumen del cuerpo determinado al girar la curva y = senx alrededor del eje OX en el intervalo [0 , π].

18.- Determinar el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por la función: $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$.

19.- Hallar el área de la región del semiplano y ≥ 0, limitada por la curva y = lnx, su tangente en el punto de abscisa x = 1 y la recta x = 3.

EJERCICIOS DE REPASO (Propuestos en PAEG)

20.- Sea la función $f(x) = x \cdot e^x$ y las rectas x = 1 e y = 0.

a) Dibuja la gráfica de la función para $x \geq 0$ y la de las rectas.
b) Señala el recinto comprendido entre las tres gráficas anteriores.
c) Calcula el área de dicho recinto.

21.- Calcula el área del recinto limitado por las funciones

$y = -x^2 + 4$ e $y = |x + 2|$

22.- Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la curva $y = -2x^2 + 4x$ y las tangentes a dicha curva en los puntos en que ésta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

23.- Determinar a (a > 0) sabiendo que la figura plana limitada por la parábola de ecuación $y = 3ax^2 + 2x$, la recta y = 0 y la recta x = a tiene área $(a^2 - 1)^2$.

24.- La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices A(0 , 0) , B(1 , 0) , C(1 , 1) y D(0 , 1) en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.
b) Calcula el área de cada uno de ellos.

25.- De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en x = 1, un punto de inflexión en (0 , 0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$.

Calcula a , b , c y d.

26.- a) Halla el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)dx = \frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la recta y = x + 1 y las rectas x = 0 y x = 2.

27.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1 \quad y \quad g(x) = 1 - x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. B) Calcula el área de dicho recinto.

28.-Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones :

$f(x) = x^2 - 3 \quad y \quad g(x) = 2x$

Calcula el área determinada por ellas.

29.- Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad y \quad g(x) = -x + \dfrac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

30.- Consideremos la parábola $f(x) = -x^2 + 4$. Se pide: a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a f(x) en x = 2 y x = -2, esbozando una gráfica con la parábola y las dos rectas tangentes. b) Determina el área comprendida entre la parábola y dichas rectas tangentes.

31.- Enuncia la regla de Barrow. Calcula $\int_0^1 (x^2 + x) \cdot e^x dx$

32.- De la función $f(x) = (x + a) \cdot senx$, $con\ a \in R$, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en x = 0. Calcular a.

33.- Definición de función primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función f(x):

a) Comprueba que f(x) es una función creciente en **R**.

b) Calcula el área limitada por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas x = -1 y x = 1.

34.- a) Represente gráficamente la región del plano limitada por las curvas $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y la recta x = 2.

b) Calcular el área de dicha región.

35.- Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ -2\le x<0\\ (2x-2)^2 & si\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

a) Esboza el recinto encerrado por la gráfica de y=f(x), y el eje OX.

b) Determina el área de dicho recinto

SOLUCIONES

1.- $a)\ \frac{\pi}{3}$ $b)\ \frac{\pi}{16}$ $c)\ 2\ln 2-1$ $d)$ $e)\ \frac{1}{2}$ $f)\ -2\pi$

2.- $a+b=\frac{\pi^2}{8}$, $a-b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{\pi^2+4}{16}$, $b=\frac{\pi^2-4}{16}$

3.- F´(0) = 0 **4.-** $a=\frac{3}{4}$, $b=2$, $I=\frac{109}{8}$

5.- $\frac{14}{3}u^2$ **6.-** $\frac{64}{3}\ u^2$ **7.-** $\frac{8}{3}u^2$ **8.-** 1 u^2

9.- 2 u^2 **10.-** $\frac{\pi}{3}\ u^2$

12.- 3ln3 – 2 u^2 **13.-** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\ u^2$ **14.-** e – 2 u^2

16.- $\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\ u^3$ **17.-** $\frac{\pi^2}{2}u^3$ **18.-** $\frac{32\pi}{3}\ u^3$

19.- $4-3\ln 3\ \ u^2$ **20.-** c) 1 u^2 **21.-** $\frac{9}{2}$ u^2

22.- $\frac{4}{3}$ u^2 **23.-** $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.-** b) $\frac{\sqrt{2}}{3}u^2$ y $1-\frac{\sqrt{2}}{3}u^2$

25.- a = -1 , b = 0 , c = 3 y d = 0.

26.- a) $a=\sqrt{10}$ b) A = 4 u^2

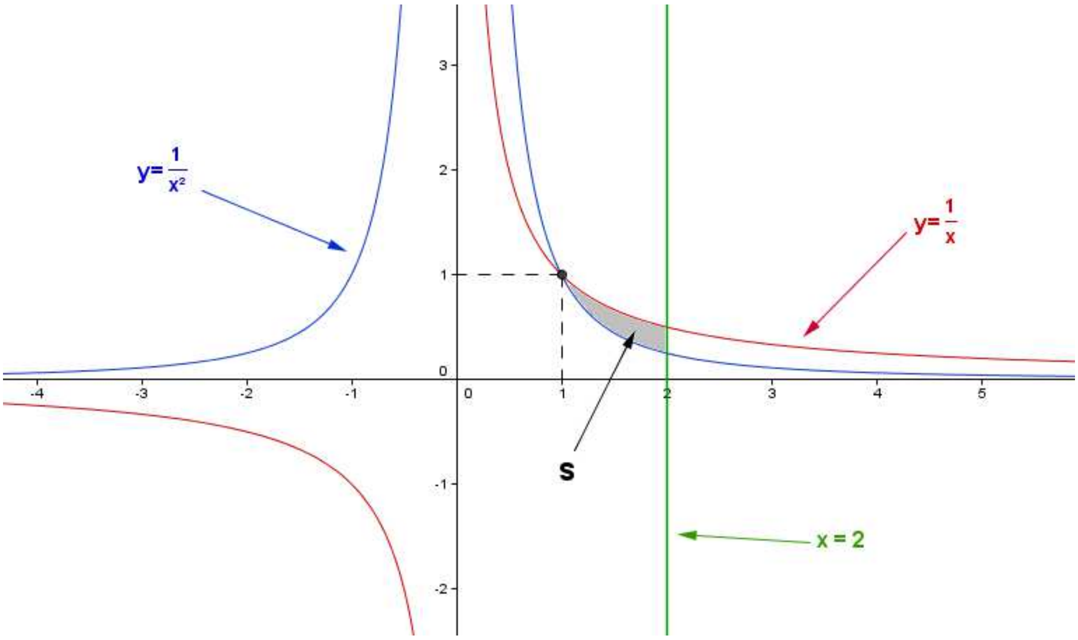
27.- $b)\ \frac{9}{2}u^2$ **28.-** $\frac{32}{3}u^2$ **29.-** b) $\frac{15}{8}-2\ln 2\ \ u^2$

30.- a) y = -4x + 8 , y = 4x+8. b) $\frac{16}{3}\ u^2$ **31.-** e – 1

32.- a = π

33.- b) A = 2e – 2 u^2

34.- a) S es la región indicada en el gráfico adjunto



c) S = $\ln 2 - \dfrac{1}{2} \quad u^2$

35.- b) $\dfrac{13}{3} \quad u^2$