

UNIDAD 8 INTEGRAL INDEFINIDA

1.- Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3} dx & b) \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^4 \cdot \sqrt[6]{x}} dx & c) \int \frac{-4}{x} dx & d) \int \cos 5x dx \\ e) \int \frac{1}{(x+2)^3} dx & f) \int x \cdot e^{3x^2} dx & g) \int \sen x \cdot \cos x dx & h) \int \frac{dx}{\cos^2 5x} \end{array}$$

2.- Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx & b) \int x \cdot 2^{4x^2} dx & c) \int x^2 \cdot \sen x^3 dx & d) \int \frac{2dx}{x} \\ e) \int \frac{\cos x}{1-\sen x} dx & f) \int \frac{e^{Lx}}{2x} dx & g) \int \frac{4x^3+2}{1+2x+x^4} dx & h) \int \operatorname{tg} x dx \end{array}$$

3.- Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{x}{\sqrt{5+4x^2}} dx & b) \int 2x\sqrt{1+4x^2} dx & c) \int (1-\sen x)^3 \cdot \cos x dx \\ d) \int \frac{6x^2-8x}{x^3-2x^2+5} dx & e) \int x^3 \cdot \cos x^4 dx & f) \int 7 \cdot \sqrt[3]{3x} dx \end{array}$$

4.- Calcular las siguientes integrales por el método de integración por partes:

$$\begin{array}{llll} a) \int x \cdot \sen x dx & b) \int \ln x dx & c) \int \operatorname{arctg} x dx & d) \int x \cdot \ln x dx \\ e) \int x^2 \cdot \sen x dx & f) \int x^2 \cdot e^{3x} dx & g) \int \frac{x}{e^x} dx & h) \int x \cdot 2^{-x} dx \end{array}$$

5.- Calcular las siguientes integrales por cambio de variable:

$$\begin{array}{lll} a) \int \sen 2x dx & b) \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx & c) \int x \cdot \sqrt{x+1} dx \\ d) \int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx & e) \int \frac{1}{1+e^x} dx & f) \int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} dx \end{array}$$

6.- Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int \arccos x dx \quad b) \int \cos(\ln x) dx \quad c) \int \sqrt{(1+\cos x)^3} \cdot \sen x dx$$

7.- Resolver las siguientes integrales racionales:

$$\begin{array}{llll}
 a) \int \frac{4}{3x-1} dx & b) \int \frac{3x-1}{2x+3} dx & c) \int \frac{-x}{2x^2+3} dx & d) \int \frac{5dx}{x-7} \\
 e) \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx & f) \int \frac{x^2+x+1}{x-1} dx & g) \int \frac{3x-4}{x^2+4x+4} dx & h) \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx
 \end{array}$$

8.- Resolver las siguientes integrales trigonométricas:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x dx & b) \int \operatorname{sen}^3 x dx & c) \int \cos^2 x dx \\
 d) \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x dx & e) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx & f) \int \sec x dx (*)
 \end{array}$$

9.- Calcular las integrales siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 a) \int \sqrt{x^3-1} \cdot x^2 dx & b) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx & c) \int \sqrt{8-2x^2} dx & d) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \\
 e) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & f) \int \frac{dx}{1-e^x} & g) \int \frac{\sqrt{7+2 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx & h) \int \sqrt{4-x^2} dx
 \end{array}$$

10.- Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4} dx & b) \int \frac{x^3-x^2+3x+1}{x^3-x^2-x+1} dx & c) \int \frac{x+4}{x^2+2} dx \\
 d) \int \frac{4dx}{5x+2} & e) \int \frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10} dx & f) \int \frac{x^2+x+6}{x^2+4} dx
 \end{array}$$

11.- Calcular las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{4^x+1}{2^x+1} dx & b) \int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x-2}} & c) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln x}} \\
 d) \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx & e) \int \sqrt{e^x-1} dx & f) \int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx
 \end{array}$$

12.- Calcular la integral:

$$I = \int \frac{3^x + 27^x}{1+9^x} dx.$$

13.- Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x}} \qquad b) \int \frac{dx}{3-2x-x^2}$$

$$c) \int \frac{3x}{x^2+4x+4} dx \qquad d) \int (\ln x)^2 dx$$

14.- Resolver las integrales siguientes:

$$a) \int \frac{dx}{x^2+x+1} \qquad b) \int \frac{3x-2}{x^2+x+1} dx$$

15.- Resolver las integrales siguientes:

$$a) \int \operatorname{tg} \frac{x}{4} dx \qquad b) \int \frac{2}{\cos^2(x/2)} dx \qquad c) \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} (*)$$

$$d) \int \frac{dx}{5+4 \cos x} dx (*) \qquad e) \int \frac{1}{x} \cdot \ln^3 x dx \qquad f) \int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$$

16.- Resolver las integrales siguientes:

$$a) \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} dx \qquad b) \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x dx \qquad c) \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x dx$$

$$d) \int \operatorname{sen}^5 3x dx \qquad e) \int \cos^4 x dx \qquad f) \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

17.- Sin utilizar cálculo de derivadas, demostrar que las funciones siguientes son primitivas de una misma función:

$$F(x) = \frac{1}{1+x^4} \qquad y \qquad G(x) = \frac{-x^4}{1+x^4}$$

18.- Resolver la integral: $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1} dx$

19.- Demostrar que: $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C .$

EJERCICIOS DE REPASO (Propuestos en PAEG)

20.- Resolver:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

21.- Resolver la integral siguiente:

$$\int \frac{3x}{x^2 + 2x + 3} dx$$

22.- Resolver:

$$\int \frac{x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$

23.- Resolver:

$$\int (x^2 + 2x + 1) \cdot \ln x dx$$

24.- Calcula la primitiva de $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$

25.- Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

26.- Dada la función $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x^2+x}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ con la condición de que su gráfica pase por el punto $(0, 2)$.

27.- Calcula la integral indefinida $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4} dx$

28.- Calcula la integral indefinida $\int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 1} dx$

29.- Calcula la siguiente integral $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

30.- Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ que pase por el origen de coordenadas.

31.- Calcula la integral $\int \frac{-x+3}{4x^2+9} dx$

32.- Resuelve la integral $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$

33.- Resuelve la integral $\int \frac{e^{2x} + e^x}{1 + e^{2x}} dx$

34.- Resuelve la integral $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$

35.- Resuelve la integral $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx$

36.- Resuelve la integral $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$

37.- Resuelve la integral $\int \frac{1+8x}{1+x^2} dx$

38.- Resuelve la integral $\int (x^2 + x) \cdot \cos x dx$

39.- Resuelve la integral $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$

40.- Resuelve la integral $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$

41.- Resolver la integral $\int \frac{2}{4+x^2} dx$

42.- Resolver la integral: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx$

SOLUCIONES

1.- a) $\frac{-5}{8\sqrt{x^8}} + C$ b) $\frac{-2}{5\sqrt{x^5}} + C$ c) $-4 \ln|x| + C$ d) $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$

e) $\frac{-1}{2(x+2)^2} + C$ f) $\frac{e^{3x^2}}{6} + C$ g) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$ h) $\frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + C$

2.- a) $x - \operatorname{arctg} x + C$ b) $\frac{2^{4x^2}}{8 \cdot \ln 2} + C$ c) $\frac{-\cos x^3}{3} + C$ d) $2 \ln|x| + C$

- e) $-\ln|1 - \operatorname{sen} x| + C$ f) $\frac{x}{2} + C$ g) $\ln|1 + 2x + x^4| + C$ h) $-\ln|\cos x| + C$
- 3.- a) $\frac{\sqrt{5+4x^2}}{4} + C$ b) $\frac{\sqrt{(1+4x^2)^3}}{6} + C$ c) $\frac{-(1-\operatorname{sen} x)^4}{4} + C$
- d) $2\ln|x^3 - 2x^2 + 5| + C$ e) $\frac{\operatorname{sen} x^4}{4} + C$ f) $\frac{21}{4}x \cdot \sqrt[3]{3x} + C$
- 4.- a) $\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x + C$ b) $x \cdot \ln x - x + C$ c) $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$
- d) $\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$ e) $(2-x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + C$ f) $e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C$
- g) $-e^{-x}(x+1) + C$ h) $-2^{-x} \left(\frac{x}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} \right) + C$
- 5.- a) $\frac{-\cos 2x}{2} + C$ b) $\frac{-1}{\operatorname{sen} x} + C$ c) $\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$
- d) $2\ln|\sqrt{x}+1| + C$ e) $\ln \left| \frac{e^x}{e^x+1} \right| + C$ f) $2\sqrt{e^x} + 2\ln|1-\sqrt{e^x}| + C$
- 6.a) $x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ b) $\frac{x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) + x \cdot \cos(\ln x)}{2} + C$ c) $\frac{-2}{5} \cdot \sqrt{(1+\cos x)^5} + C$
- 7.- a) $\frac{4}{3}\ln|3x-1| + C$ b) $\frac{3}{2}x - \frac{11}{4}\ln|2x+3| + C$ c) $\frac{-1}{4}\ln(2x^2+3) + C$
- d) $5\ln|x-7| + C$ e) $-3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$ f) $\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| + C$
- g) $3\ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C$ h) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$
- 8.- a) $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$ b) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ c) $\frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- d) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$ e) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$ f) $\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C$
- 9.- a) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3-1)^3} + C$ b) $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$ c) $\sqrt{8} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\sqrt{8}}{2} \operatorname{sen} \left(2 \cdot \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C$

- d) $\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$ e) $\frac{1}{2}\arcsen x - \frac{1}{4}\sen(2 \cdot \arcsen x) + C$ f) $x - \ln|e^x - 1| + C$
- g) $\frac{1}{3}\sqrt{(7 + 2\operatorname{tg} x)^3} + C$ h) $2\arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \sen\left(2 \cdot \arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$
- 10.- a) $\frac{x^2}{2} + 5x - \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{65}{3}\ln|x-4| + C$ b) $x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C$
- c) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2| + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$ d) $\frac{4}{5}\ln|5x + 2| + C$
- e) $\frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln|x^2 - 2x + 10| + \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$ f) $x + \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$
- 11.- a) $(2^x + \ln(2^x) - 2\ln(2^x + 1)) \cdot \log_2 e + C$
- b) $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x-2})^3 - 2(\sqrt[4]{x-2})^2 + 4\sqrt{x-2} - 4\ln(1 + \sqrt[4]{x-2}) + C$
- c) $-2\sqrt{1 - \ln x} + C$ d) $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$
- e) $2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1}) + C$ f) $\frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1 + x^2) + C$
- 12.- $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ ($3^x \cdot \log_3 e + C$)
- 13.- a) $-2\sqrt{2-x} + C$ b) $-\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$
- c) $3\ln|x+2| + \frac{6}{x+2} + C$ d) $x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + C$
- 14.- a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ b) $\frac{3}{2}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{14\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$
- 15.- a) $-4\ln\left|\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right| + C$ b) $4\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ c) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$
- d) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$ e) $\frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$ f) $\frac{(1 + \ln x)^3}{3} + C$
- 16.- a) $x - \sen x + C$ b) $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$ c) $\frac{\sen^4 x}{4} - \frac{\sen^6 x}{6} + C$

$$d) \frac{-\cos 3x}{3} - \frac{2}{9} \cos^3 3x - \frac{1}{15} \cos^5 3x + C \quad e) \frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$f) \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$18.- I = e^x - 2 \cdot \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

$$20.- -\ln|x| + \ln|x^2 + 1| + C \quad 21.- \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2 + 2x + 3| - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$22.- \frac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{5}{2} \cdot \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C \quad 23.- \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$24.- 2 \cdot \ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C \quad 25.- f(x) = x^4 + x^2 + x \quad 26.- g(x) = e^{x^2+x} + 1$$

$$27.- \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \quad 28.- \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

$$29.- \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C \quad 30.- F(x) = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 2$$

$$31.- -\frac{1}{8} \cdot \ln(4x^2 + 9) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x\right) + C \quad 32.- x^2 + x + 24 \ln|x-2| - 16 \ln|x-3| + C$$

$$33.- \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + \operatorname{arctg}(e^x) + C \quad 34.- \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$$

$$35.- -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C \quad 36.- \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1} + C$$

$$37.- \operatorname{arctg} x + 4 \cdot \ln(1 + x^2) + C \quad 38.- (x^2 + x - 2) \cdot \operatorname{sen} x + (2x + 1) \cdot \cos x + C$$

$$39.- -\ln|x-1| + 2 \cdot \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C \quad 40.- e^x + \ln|e^x - 1| + C$$

$$41.- \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \quad 42.- \frac{8}{7} \sqrt{x^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$