UNIDAD 6 FUNCIONES. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.- Escribir como intervalos y como entornos los siguientes conjuntos:

$a)\quad (-2\ ,\ 5) \qquad b)\quad \{x \in R / |x-3| < 2\}$

$c)\quad E_{0,01}(-7) \qquad d)\quad \{x \in R / 0 < |x+3| < 0{,}2\}$

2.- Hallar cotas y extremos, accesibles o no, de los siguientes subconjuntos de R:

$a)\quad N \qquad b)\quad (-\infty\ ,\ -3)$

$c)\quad \left\{\frac{1}{n} \in R / n \in N\ ,\ n \neq 0\right\} \qquad d)\quad \left\{\frac{n}{n+1} \in R / n \in N\right\}$

3.- Hallar los dominios de las siguientes funciones:

$a)\quad y = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \qquad b)\quad y = e^{\frac{x}{x^2-1}} \qquad c)\quad y = \frac{x^5-3}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad d)\quad y = \log_{4/5}(x)$

$e)\quad y = \sec x \qquad f)\quad y = \sqrt[3]{tgx} \qquad g)\quad y = L\left|\frac{x}{x-3}\right| \qquad h)\quad y = 2^{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$

4.- Representar las funciones elementales siguientes:

$a)\quad y = x^2 - |x| + 2 \qquad b)\quad y = |x^2 - 6x + 8| \qquad c)\quad y = 1 + 2\cos x$

$d)\quad y = 2^x - 2^{-x} \qquad e)\quad y = \frac{x}{|x|} \qquad f)\quad y = \cos ecx$

5.- Sea $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Hallar f^{-1}. ¿Es función?. Hallar su dominio, y comprobar que f y f^{-1} son inversas.

6.- Sean $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-x}}$. Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$

7.- Se define $f^{-1}(A) = \{x \in R\ /\ f(x) \in A\}$. Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Hallar:

$f^{-1}(1) \quad , \quad f^{-1}(3) \quad , \quad f^{-1}([0,3))$

8.- La temperatura **y** en grados Fahrenheit (°F) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura **x** en grados Celsius (°C). En la escala Fahrenheit el agua se congela a 32° y hierve a 212°. Hallar la expresión y=f(x). Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 98,6 °F, ¿a qué temperatura corresponde en la escala Celsius?.

9.- La cantidad q(t) que queda de una masa de **M mg** de una sustancia radiactiva al cabo de t días viene dada por la expresión: $q(t) = M \cdot e^{-0,1 \cdot t}$

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa **M** se ha reducido a la mitad?

b) Si la masa inicial **M** es de 27 mg, ¿cuánta sustancia quedará aproximadamente al cabo de 10 días?. Hacer una representación gráfica aproximada de q(t).

10.- ¿Qué diferencia existe entre extremo superior y máximo absoluto de una función?. Razonarlo con ejemplos. ¿Pueden coincidir?

11.- Calcular los límites siguientes:

$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2}$ $\quad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^4-1}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}-3\right)$

$e)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$ $\quad f)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3}$ $\quad g)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

12.- Calcular los límites siguientes:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ $\quad$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen 8x}{4x}$ $\quad$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{sen 14x}{sen 7x}$ $\quad$ 4) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2-1}{x^2}$ $\quad$ 6) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $\quad$ 7) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-x^2+1}{4x^3+x^2-x}$ $\quad$ 8) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $\quad$ 10) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad$ 11) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

13.- Calcular los límites siguientes:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}\right)^{x+3}$ $\quad$ 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+1}{2x^2+x-1}\right)^{x^2}$ $\quad$ 3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$ $\quad$ 4) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

14.- Sea y=f(x) la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} e^{1/x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & si \quad 0\le x\le 1 \\ 1+\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Hallar: $a)\ \lim_{x\to 0} f(x)$, $b)\ \lim_{x\to 1} f(x)$

15.- Analizar la continuidad de: $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$

16.- Analizar la continuidad de la siguiente función según los valores de **a**:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - ax + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

17.- Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

$a) \quad f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 1 \\ \ln x & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

18.- Dar una interpretación geométrica del Teorema de Bolzano, y utilizarlo para demostrar que las gráficas de las siguientes funciones se cortan en algún punto:

$f(x) = x^3 + x^2 \quad y \quad g(x) = 3 + \cos x$

19.- Analizar la continuidad de las siguientes funciones según los valores de **a**:

$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si \quad x \leq 2 \\ a - x^2 & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x < 1 \\ x + 2a & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

20.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & si \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Observar que no existe ningún $c \in (0,1) \;\; tal \; que \quad f(c) = 0$, y que f cambia de signo en los extremos de [0,1]. ¿Contradice el Teorema de Bolzano?. Razonar la respuesta.

21.- Analizar la continuidad de la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x + 1} & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

22.- Sea f(x) = tgx . ¿Podemos afirmar que toma todos los valores comprendidos entre –1 y 1 en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$?. ¿Contradice este resultado el Teorema de los valores intermedios?.

23.-Demostrar que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.

24.- ¿Tiene alguna raíz real la ecuación senx + 2x + 1 = 0?. En caso afirmativo, determinar un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

25.- Teorema del punto fijo: Sea y = f(x) una función continua en [0 , 1] y verificando que $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$. Demostrar que existe al menos un punto $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. (x_0 se llama punto fijo de y = f(x))

26.- Sea la función $y = f(x) = (-1)^{E(x)}$. Haz su representación en [-3 , 3]. Analizar su continuidad en dicho intervalo.

27.- Hallar el valor de **k** para que y=f(x) sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ k & si \quad x = 1 \end{cases}$$

28.- Sea $f(x) = x^2 - 2x + 6$. ¿Toma todos los valores comprendidos entre 1 y 6?. ¿Y entre 6 y 12?. Razonar la respuesta.

29.-Demostrar que la ecuación $\pi^x = e$ tiene al menos una solución real.

30.- Demostrar que la ecuación x = cosx tiene solución real.

31.- Dada la función: $f(x)=\dfrac{7-(16)^{1/x}}{1+(16)^{1/x}}$ $\quad si \quad x\neq 0$.

a) Determinar los puntos en los que f es continua.

b) Demostrar que existe un punto del intervalo (2 , 4) en el que f toma el valor 1.

32.- Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{sen\pi x}$. Determinar su dominio de continuidad y clasificar sus discontinuidades. A continuación calcular el valor de f(0) y f(1) para que f sea continua en [0 , 1].

33.- La función f(x)=tgx – x tiene un cero en x = 0. Por otro lado, f(π) = -π < 0 y f(-π) = = π > 0. ¿Significa esto que f es continua en [-π , π]?. Razonar la respuesta.

34.- Si una función está acotada en [a , b], y $f(a)\cdot f(b)<0$, ¿se puede asegurar que existe un valor $c\in[a,b]$ tal que f(c) = 0?. Razonar la respuesta.

35.- Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación siguiente tiene al menos una solución real: $senx = x^2-1$.

SOLUCIONES

2.- a) Extremo inferior: 0. b) Extremo superior: -3. c) Extremo superior: 1 (Accesible). Extremo inferior: 0 (No accesible). d) Extremo superior: 1 (No accesible). Extremo inferior: 0

3.- $a)\ (-\infty,0]\cup(1,\infty) \quad b)\ \{x\in R/x\neq\pm 1\} \quad c)\ R \quad d)\ \{x\in R/x>0\}$

$e)\ \{x\in R/x\neq(2k+1)\cdot\pi \ con\ k\in Z\} \quad f)\ Igual\ que\ e \quad g)\ \{x\in R/x\neq 0,3\} \quad h)\ \{x\in R/x>0\}$

5.- $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=f(x)$ **6.-** $(f\circ g)(x)=\dfrac{10-3x}{3-x}$. $g\circ f$ no es función real.

7.- $f^{-1}(1)=3\pm\sqrt{2}$, $f^{-1}(3)=\{1,5\}$, $f^{-1}([0,3))=(1,2]\cup[4,5)$

8.- y = 1´8x + 32. 37° C.

9.- a) 10ln2 días. b) 9´93 mg aproximadamente.

11.- $a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

$e)\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $f)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $g)\ 1$

12.- 1) -2 2) 2 3) 2 4) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ 5) 1 6) 0 7) $\frac{1}{4}$

8) 0 9) $\frac{1}{2}$ 10) $\frac{3}{2}$ 11) $\frac{a}{2}$

13.- 1) $e^{\frac{5}{2}}$ 2) 0 3) 0 4) $e^{\frac{1}{3}}$

14.- $a)\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $b)\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

15.- En x = -1 disc. de salto infinito. En x = 2 disc. evitable.

16.- $a = \frac{1}{2}$ continua en R. Si $a \neq \frac{1}{2}$ en x = 1 hay discontinuidad de salto finito.

17.- a) En x = 1 disct. de salto finito. b) En x = 0 disct. de salto infinito.

19.- a) a = -8 es continua en R. Si $a \neq -8$ hay disct. de salto finito en x = 2.

b) Para a = 0 es continua en R, y existe $a_0 \in (1,2)$ para el que también es continua en R. Si $a \neq 0, a_0$ hay disct. de salto finito en x = 1.

21.- En x = 0 hay discontinuidad de salto finito.

24.- $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

26.- Para x = k con $k \in Z$ hay discontinuidad de salto finito.

27.- $k = \frac{1}{2}$

31.- a) En $R - \{0\}$, x = 0 salto finito

32.- $D = \{x \in R / x = k\ con\ k \in Z\}$. $f(0) = \frac{1}{\pi}$, $f(1) = -\frac{1}{\pi}$