UNIDAD 4 EL ESPACIO AFÍN

1.- Demostrar que si dos puntos están dados respecto del sistema de referencia afín cartesiano, entonces el vector que los une tiene por coordenadas la diferencia de las coordenadas de ambos puntos (extremo respecto origen).

2.- Demostrar que las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos. Utilizar el principio anterior para el punto simétrico, P´, del punto P(7 , 4 , -2) respecto del punto Q(3 , -11 , 7).

3.- Determina las coordenadas de los puntos que dividen al segmeto AB en tres partes iguales, siendo A(1 , 3 , 0) y B(-2 , 5 , -4).

4.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(-5,3,7) y B(2, -3,3).

5.- Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$a)\quad r \equiv \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = -5+\lambda \end{cases} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases} \qquad b)\quad r \equiv \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = -y+1 \\ z = 5 \end{cases} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} x = -1-6\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

6.-Hallar la ecuación del plano que pasa por A(2,-1,0) , B(1,3,-1) y C(4,0,-2).

7.-Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,-1,3) y es paralelo al plano $\pi \equiv 2x+3y-z+4=0$.

8.- Hallar, si es posible, el plano determinado por las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = -2+\mu \\ z = 3\mu \end{cases}$$

9.- a) Determina a y b para que el plano $\pi \equiv 2x+y+az=b$ contenga a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$$

b) ¿Para qué valores de a y b la recta es paralela al plano?.

c) ¿Para qué valores se cortan?.

10.- Determinar la posición relativa de los planos:

$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$
$\pi_2 \equiv x - y + z + 2 = 0$
$\pi_3 \equiv 2x - 2y + 2z + 3 = 0$

11.- Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto A(1,1,1) y es paralela a la intersección de los planos $\pi_1 \equiv y = 2x - 1 \quad y \quad \pi_2 \equiv z = 1$.

12.- Hallar las ecuaciones de la recta paralela a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y que pasa por el punto intersección de la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ y el plano x – y + z =5

13.-¿pertenece el plano $\pi \equiv x + y + z + 2 = 0$ al haz de planos determinado por la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$?.

14.- Discutir la posición relativa de los planos según el valor del parámetro **a**:

$\pi_1 \equiv 3x - ay + 2z - a + 1 = 0$
$\pi_2 \equiv 2x - 5y + 3z - 1 = 0$
$\pi_3 \equiv x + 3y - (a-1)z = 0$

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas: $r \equiv x = -y = -z \quad , \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

16.- Hallar el valor de **a** para que las rectas r y s estén situadas en un mismo plano $r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$. Determinar dicho plano

17.- a) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OY?.

b) Razonar cómo son las ecuaciones implícitas de una recta paralela al eje OZ.

18.- Sea el plano $\pi \equiv ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas de ecuaciones:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3 \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Determinar el valor de **a** para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

19.- Sean los planos $\pi \equiv ax + y + z = a \quad y \quad \pi' \equiv x - ay + az + 1 = 0$.

Demostrar que $\forall\ a \in R$ se cortan en una recta.

Determinar la dirección de dicha recta.

20.- Hallar las ecuaciones del haz de planos que no cortan a la recta 2x = y = 3z y pasan por el punto P(-2,1,3).

21.- Sean $\pi_1\ y\ \pi_2$ dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en $\pi_1\ y\ \pi_2$ respectivamente. ¿Podemos afirmar que r_1 y r_2 son paralelas?. Razonar la respuesta.

22.-¿Qué condiciones deben cumplir a, b, c y d para que el plano ax + by + cz + d = 0 sea:

a) paralelo al plano OXY?
b) Perpendicular al plano OXY?
c) Paralelo al eje OZ?
d) No sea paralelo a ninguno de los ejes?.

23.- Dados los puntos A(1,0,0) , B(0,2,0) y C(0,0,3) , sean A´ el simétrico de A respecto de B, B´ el simétrico de B respecto de C y C´ el simétrico de C respecto de A. Hallar la ecuación del plano que pasa por A´ , B´ y C´.

24.- Halla el valor de k para que las rectas r y s se corten en el espacio y determina dicho punto de corte, siendo:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

25- Sean los puntos A(-2 , -4 , -3) y B(2 , 6 , 5), y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$.

Averiguar si existe alguna recta tal que contenga a los puntos A y B y corte a r. Razonar la respuesta.

26.- Considera los puntos A(2 , 0 , 0), B(0 , 2 , 0), C(2 , 2 , 1) y D(1 , 1 , 2), calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.

b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A , B y C.

27.- Sean las rectas $r \equiv \left\langle \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \right.$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -s \\ z = a + s \end{cases}$ $con\ t, s \in R$

a) Encuentra un valor del parámetro a para que r y r´ estén contenidas en un mismo plano y determina la ecuación de dicho plano.

b) Para a = 0, halla las ecuaciones parámetricas de un plano π que contenga a r y las ecuaciones parámetricas de un plano π´ de modo que ambos planos sean paralelos.

28.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in R$

a) Determina el parámetro $a \in R$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto P(1, 1, 0)

<u>SOLUCIONES</u>

2.- P´(-1 , -26 , 16).

3.- $C\left(0, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y $D\left(-1, \frac{13}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

4.- $r \equiv \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$

5.- a) Se cruzan en el espacio. b) Se cortan en el punto P(-1 , 3 , 5).

6.- 7x + 4y + 9z – 10 = 0.

7.- 2x + 3y – z + 2 = 0.

8.- x + y – z + 1 = 0.

9.- *a*) $a = 4$, $b = 3$ *b*) $a = 4$, $b \neq 3$ *c*) $a \neq 4$, $b \in R$.

10.- π_1 corta a π_2 *y* π_3 (paralelos distintos entre sí) en dos rectas paralelas.

11.- $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

12.- $r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{17}{5} + 2\lambda \\ y = -\dfrac{9}{5} + 3\lambda \\ z = -\dfrac{1}{5} - \lambda \end{cases}$ **13.-** No pertenece.

14.- Si $a \neq 2 , 5$ se cortan en un punto.

Si a = 2 se cortan en la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{3}{11} - 4\lambda \\ y = -\dfrac{1}{11} + 5\lambda \\ z = 11\lambda \end{cases}$$

Si a = 5 se cortan dos a dos en rectas (que son paralelas).

15.- Infinitas rectas. Una de ellas es, por ejemplo:

$$t \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = z.$$

16.- a = - 4 , plano: x – 5y + 3z + 9 = 0. **18.-** a = 1.

19.-Vector director: $\vec{u} = (-2a\ ,\ a^2 - 1\ ,\ a^2 + 1)$.

20.- Haz de planos de ecuación:

$$2x + ky + (-3 - 3k)z + 13 + 8k = 0 \quad con \quad k \in R \quad y \quad k \neq -\frac{13}{8}.$$

23.- $\pi \equiv 42x + 21y + 14z - 42 = 0$ **24.-** k = 1 P(-2 , 4 , 1).

25.- No. **26.-** a) $1,\widehat{3}$ u^3. b) $\pi \equiv x + y - 2z + 2 = 0$

27.- a) a = 1 ; α ≡ y+z = 1. b) π≡ y + z – 1 = 0 , π′≡ y + z = 0.

28.- a) a=2. b) $r' \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$